Санкт-Петербургский государственный университет

Сабирова Дарья Зарифовна

Выпускная квалификационная работа

Сходимость к неподвижным точкам в одной социологической модели

Уровень образования: бакалавриат
Направление: 01.03.01 «Математика»
Основная образовательная программа: СВ.5000.2017 «Математика»

Научный руководитель:
Профессор факультета МКН,
Доктор физико-математических наук,
Пилюгин Сергей Юрьевич

Рецензент:
Доцент Математико-механического
факультета,
Доктор физико-математических наук,
Крыжевич Сергей Геннадьевич

Санкт-Петербург
2021

Аннотация

В данной работе рассматривается дискретная динамическая система, моделирующая итеративный процесс выбора в группе агентов между двумя возможными исходами. Исследуемая модель основана на принципе bounded confidence, введенном Хегсельманном и Краузе. В соответствии с этим принципом, на каждом шаге процесса агент формирует свое мнение исходя из близких ему мнений других агентов. Возникающая динамическая система нелинейна и разрывна. Принципиальное отличие изучаемой в данной работе модели от ранее изучавшихся моделей такого типа состоит в том, что рассматривается не конечная, а бесконечная (континуальная) группа агентов. Такой подход требует применения существенно новых методов исследования. Описана структура возможных неподвижных точек возникающей динамической системы, изучена их устойчивость. Доказано, что любая траектория сходится к неподвижной точке.

Ключевые слова: динамическая система, динамика мнений, bounded confidence, неподвижная точка, устойчивость

1. Введение. Математические модели динамики мнений в обществе (opinion dynamics) интенсивно изучаются (отметим, например, недавние монографии [1] и [2]). В настоящее время большое внимание уделяется моделям, основанным на так называемом принципе bounded confidence, введенном в статьях [3] и [4] и детально изученном Хегсельманном и Краузе в работе [5]. В статье [8] получен аналог результата статьи [5], обобщенный на высокую размерность, так же в ней исследована скорость сходимости. В соответствии с этим принципом, формирование мнений в группе агентов при выборе между двумя возможными исходами – это результат итеративного процесса, на каждом шаге которого агент формирует свое мнение исходя из близких ему мнений других агентов. Такой процесс моделируется динамической системой, которая нелинейна и разрывна.

Следует отметить, что большинство полученных к настоящему времени результатов, относящихся к таким динамическим системам, основаны на компьютерном моделировании. [9,10]

В совместной работе С.Ю.Пилюгина и итальянского специалиста по теории управления М. Кампи было проведено качественное исследование системы, близкой к системе Хегсельманна – Краузе. Были описаны возможные типы неподвижных точек, изучена их устойчивость, установлена сходимость траекторий к неподвижным точкам. В работе [7] результаты работы [6] о сходимости траекторий к неподвижным точкам были обобщены на случай функций влияния гораздо более общего вида.

Принципиальное отличие изучаемой в данной работе модели от моделей, исследованных в работах [6] и [7], состоит в том, что рассматривается не конечная, а бесконечная (континуальная) группа агентов. Такой подход потребовал применения существенно новых методов исследования. Описана структура возможных неподвижных точек возникающей динамической системы, изучена их устойчивость. Доказано, что любая траектория сходится к неподвижной точке.

Структура работы такова. В п. 2 описывается изучаемая модель. Пункт 3 посвящен основным свойствам оператора Φ, задающего исследуемую динамическую систему. Неподвижные точки оператора Φ изучены в п. 4. В п. 5 показано, что при строго монотонной функции влияния любая траектория сходится к неподвижной точке.

2. Описание модели. Моделируется процесс выбора между двумя исходами, -1 и 1. Множество агентов, делающих выбор, отождествляется с отрезком $[0,1]$. Распределение мнений агентов описывается функцией

$$v(t), \quad t \in [0,1],$$

со значениями в $[-1,1]$, обладающей следующими свойствами.

Предполагается, что для каждой функции v существует конечное разбиение отрезка $[0,1]$,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1,$$

на каждом из интервалов (t_i, t_{i+1}) которого функция v непрерывна.

Для определенности, полагаем

$$v(0) = \lim_{t \to 0+} v(t) \text{ и } v(t_i) = \lim_{t \to t_i -} v(t), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Будем предполагать, что каждая функция v строго возрастает на интервалах (t_i, t_{i+1}) с возможным исключением интервалов $(0, t_1)$ и $(t_{N-1}, 1)$; допустим случай, в котором $v(t) \equiv -1$ on $(0, t_1)$ и (или) $v(t) \equiv 1$ на $(t_{N-1}, 1)$. Обозначим через $\mathcal{V}$ введенное множество функций. Ясно, что любая функция $v \in \mathcal{V}$ неубывающая.

Динамика на множестве $\mathcal{V}$ задается следующим оператором Ф. Фиксируем число

$$\varepsilon \in (0, 1/2), \tag{1}$$

а также такую непрерывную неубывающую функцию A на $[-1,1]$ (функцию влияния), что $A(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Рассмотрим функцию $v \in \mathcal{V}$ и точку $t \in [0,1]$. Определим множество

$$J(v,t) = \{s \in [0,1] : \ |v(s) - v(t)| \leq \varepsilon\}$$

(множество агентов s, чье мнение влияет на мнение агента t в данный момент времени). Ясно, что $J(v,t)$ – связное множество, не сводящееся к точке; пусть $I(v,t)$ – его длина. Множество $J(v,t)$ может быть не открытым и не замкнутым; мы будем использовать для него обозначение $< a, b >$ (иногда, когда его структура для нас существенна, мы будем писать, например, $(a, b]$).

Положим

$$k(v,t) = \frac{1}{I(v,t)} \int_{J(v,t)} A(v(s))\, ds. \tag{2}$$

Поясним смысл величины $k(v,t)$ – это усреднение мнений $v(s)$ агентов s, принадлежащих к "группе влияния" $J(v,t)$ агента t. Именно эта величина определяет, как изменяется мнение агента t на следующем шаге итерационного процесса формирования мнений согласно с описанной ниже конструкцией.

Рассмотрим вначале две вспомогательные функции на $[0,1]$. Положим

$$w(v,t) = v(t) + k(v,t) \tag{3}$$

а затем определим функцию u, "обрезая" значения $w(v,t)$ по следующему правилу:

$$u(t) = -1, \text{ если } w(v,t) < -1, \quad u(t) = 1, \text{ если } w(v,t) > 1,$$

и

$$u(t) = w(v,t), \text{ если } |w(v,t)| \leq 1.$$

В следующем пункте мы покажем, что функция u монотонна (свойство (P1)) и множество ее точек разрыва конечно (следствие из свойства (P3)); это позволяет "переопределить" ее в точках разрыва по правилу, описанному выше. Определим оператор Ф, сопоставляя функции v "переопределенную" функцию u.

Наша цель – описать динамику оператора Φ.

3. Основные свойства оператора Φ. Фиксируем функцию $v \in \mathcal{V}$. Вначале отметим некоторые простые свойства функций v, $w(v,t)$ и u (леммы 2 и 3 и их следствия).

Начнем с элементарного неравенства (опустим его доказательство, полностью аналогичное доказательству пункта (i) леммы 2 в работе [4]).

Лемма 1. *Рассмотрим неубывающую кусочно-непрерывную функцию z на $[0,1]$. Если $0 \le a < c_1 < c_2 < b \le 1$, то*

$$\frac{1}{c_2 - a}\int_a^{c_2} z(s)\,ds \le \frac{1}{c_2 - c_1}\int_{c_1}^{c_2} z(s)\,ds \le \frac{1}{b - c_1}\int_{c_1}^{b} z(s)\,ds. \tag{4}$$

Лемма 2. *Если $0 \le s < t \le 1$, то*

$$k(v,s) \le k(v,t). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $J(v,s) =< a_1, b_1 >$ и $J(v,t) < a_2, b_2 >$; тогда из неравенства $v(s) \le v(t)$ следует, что $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$.

Если $b_1 \le a_2$, то неравенство (5) – очевидное следствие монотонности функций A и v. В противном случае, не теряя общности, мы можем предположить, что $J(v,s) \cap J(v,t) =< a_2, b_1 >$, где $b_1 > a_2$.

По лемме 1,

$$\frac{1}{b_1 - a_1}\int_{a_1}^{b_1} A(v(s))\,ds \le \frac{1}{b_2 - a_2}\int_{a_2}^{b_2} A(v(s))\,ds,$$

откуда следует (5). $\square$

Теперь мы установим несколько свойств функции $u(t)$.

(P1) *Если $0 \le s < t \le 1$, то $u(s) \le u(t)$.*

Из леммы 2 следует, что $w(v,s) \le w(v,t)$, поэтому $u(s) \le u(t)$.

(P2) *Если $v(t) = 1$, то $u(t') = 1$ при $t' \ge t$; если $v(t) = -1$, то $u(t') = -1$ при $t' \le t$.*

Если $v(t) = 1$, то $v(s) > 0$ при $s \in J(v,t)$ (напомним, что $\varepsilon < 1/2$); следовательно, $w(v,t) > 1$ и $u(t) = 1$. Остается сослаться на свойство (P1). Второе утверждение доказывается так же.

(P3) *Если точка $t_0 \in [0,1]$ – точка непрерывности функции v и выполнены неравенства*

$$v(t_0) \ne 1 - \varepsilon \tag{6}$$

и

$$v(t_0) \neq -1 + \varepsilon, \tag{7}$$

то t_0 *– точка непрерывности* $k(v,t)$.

Легко понять, что если выполнено условие (6), то существует такая окрестность U точки t_0, что для любых $t_1, t_2 \in U$ множества $J(v,t_1)$ и $J(v,t_2)$ или одновременно содержат множество

$$\{t \in (0,1) : \ v(t) = 1\}$$

или нет.

Обозначим через dist_H расстояние по Хаусдорфу между непустыми компактными подмножествами $[0,1]$. Ясно, что в рассматриваемом случае

$$\mathrm{dist}_H(\mathrm{Cl}(J(v,t)), \mathrm{Cl}(J(v,t_0))) \to 0, \quad t \to t_0,$$

откуда очевидно вытекает требуемое свойство. То же рассуждение относится к случаю, когда выполнено условие (7).

Из определения множества $\mathcal{V}$ следует, что любое из неравенств (6) или (7) может нарушаться не более чем в одной точке. Таким образом, число точек разрыва функции $w(v,t)$ не превышает числа точек разрыва функции v плюс 2. Конечно, то же самое верно для функции u, полученной из $w(v,t)$ после “обрезания” значений, по модулю больших 1, и переопределения в точках разрыва.

(P4) *Если* $0 \leq s_0 < t_0 \leq 1$ *и*

$$\lim_{s \to s_0+} u(s), u(t_0) \in (-1,1), \tag{8}$$

то

$$\lim_{s \to s_0+} u(s) < u(t_0). \tag{9}$$

Из включений (8) и из свойства (P1) следует, что $u(s) \in (-1,1)$ при $s \in (s_0, t_0)$; тогда

$$u(s) = v(s) + k(v,s), \quad s \in (s_0, t_0),$$

и теперь неравенство (9) вытекает из неравенства

$$u(s) < v(\sigma) + k(v,\sigma) < u(t),$$

верного для любых $s_0 < s < \sigma < t < t_0$ в силу определения множества $\mathcal{V}$ и леммы 2.

Из доказанных выше утверждений следует, что оператор Φ переводит множество $\mathcal{V}$ в себя. Следовательно, для любой функции $v \in \mathcal{V}$ мы можем определить $v_n = \Phi^n(v) \in \mathcal{V}$, $n \geq 0$.

Отметим еще одно свойство, которое очевидно следует из (P2).

(P5) *Если* $v_m(t) = 1$, *то* $v_n(t) = 1$ *при* $n \geq m$; *если* $v_m(t) = -1$, *то* $v_n(t) = -1$ *при* $n \geq m$.

Лемма 3. *Фиксируем* $t \in (0, 1)$.

(1) *Если*

$$v(t) = \lim_{t' \to t-0} v(t') \geq \varepsilon, \tag{10}$$

то существует такое n_0, *что* $\Phi^n(v)(s) = 1$ *при* $n \geq n_0$ *и* $s \geq t$.

(2) *Если*

$$\lim_{t' \to t+0} v(t') \leq -\varepsilon, \tag{11}$$

то существует такое n_0, *что* $\Phi^n(v)(s) = -1$ *при* $n \geq n_0$ *и* $s \leq t$.

Доказательство. Пусть, как и выше, $v_n = \Phi^n(v)$ при $n \geq 0$. Рассмотрим несколько возможных случаев.

Случай (1a). Предположим сначала, что $v(t) > \varepsilon$. Обозначим

$$\beta = v(t) - \varepsilon;$$

по нашему предположению, $\beta > 0$. Ясно, что $v(s) \geq \beta$ для $s \in J(v, t)$. Тогда

$$k(v, t) = \frac{1}{I(v, t)} \int_{J(v,t)} A(v(s))\, ds \geq A(\beta),$$

где $A(\beta) > 0$, и

$$k(v, s) \geq k(v, t) \geq A(\beta)$$

при $s \geq t$ в силу леммы 2.

Тогда при $s \geq t$ или $v_1(s) = 1$ или $v_1(s) \geq v(s) + A(\beta)$. Из последнего неравенства с $s = t$ следует, что если $s \geq t$ и $v_1(s) < 1$, то $v_1(s) \geq \beta + A(\beta)$ для $s \in J(v_1, t)$, поэтому

$$k(v_1, s) \geq k(v_1, t) \geq A(\beta + A(\beta)) \geq A(\beta).$$

Повторяя это рассуждение, мы видим, что если $n \geq 1$ и $s \geq t$, то или $v_n(s) = 1$ или

$$v_n(s) \geq v(s) + nA(\beta) \geq \varepsilon + nA(\beta),$$

что возможно лишь для конечного множества значений n. Отсюда и следует утверждение (1) нашей леммы.

Случай (1b). Предположим, что $v(t) = \varepsilon$. В этом случае $v(s) \geq 0$ для $s \in J(v,t)$ и множество $J(v,t)$ содержит невырожденный промежуток, на котором функция v непрерывна и положительна. Поэтому $k(v,t) > 0$, $v_1(t) > v(t)$, и рассматриваемый случай сводится к предыдущему.

Доказательство пункта (2) леммы практически аналогично (но при этом приходится учитывать, является ли точка t точкой непрерывности функции v). $\square$

4. Неподвижные точки оператора Φ. Фиксируем число $T \in [0,1]$ и определим функцию $V_T \in \mathcal{V}$ следующим образом:
- $V_0 \equiv 1$, $t \in [0,1]$;
- Если $T > 0$, то $V_T(t) = -1$ при $0 \leq t \leq T$ и $V_T(t) = 1$ при $T < t \leq 1$.

Из свойства (P2) следует, что любая функция V_T является неподвижной точкой оператора Φ. Назовем такие функции V_T основными неподвижными точками Φ.

Следующее утверждение показывает, что основные неподвижные точки являются притягивающими точками оператора Φ.

Теорема 1. *Если $v \in \mathcal{V}$ и*

$$|v(t)| \geq \varepsilon, \quad t \in [0,1], \tag{12}$$

то существуют такие индекс n_0 и основная неподвижная точка V_T, что $\Phi^n(v) = V_T$ при $n \geq n_0$.

Доказательство. Если выполнено условие (12), то возможен один из следующих трех случаев:

$$v(t) \geq \varepsilon, \quad t \in [0,1], \quad v(t) \leq -\varepsilon, \quad t \in [0,1],$$

или существует такое $T \in (0,1)$, что

$$v(t) \leq -\varepsilon, \quad t \in [0,T], \quad \text{и} \lim_{t \to T+} v(t) \geq \varepsilon.$$

В каждом из этих случаев, утверждение теоремы – прямое следствие леммы 3. $\square$

Опишем теперь неподвижные точки оператора Φ, которые не являются основными.

Пусть $v \in \mathcal{V}$ – неподвижная точка Φ, множество значений которой отлично от $\{-1,1\}$. Определим числа $\theta, \tau \in [0,1]$ равенствами

$$\tau = \inf\{t : \ v(t) = 1\} \text{ и } \theta = \sup\{t : \ v(t) = -1\}.$$

Из определения класса $\mathcal{V}$ следует, что $v(\theta) = -1$ и $v(\tau) \neq 1$. Ясно, что $\theta < \tau$; положим $\Delta = (\theta, \tau]$.

Так как

$$\Phi(v)(t) = v(t) \neq \pm 1, \quad t \in \Delta,$$

выполнены равенства

$$\Phi(v)(t) = v(t) + k(v,t), \quad t \in \Delta,$$

поэтому

$$k(v,t) \equiv 0, \quad t \in \Delta. \tag{13}$$

Теорема 2. *Если $v \in \mathcal{V}$ – неподвижная точка Φ с описанными выше свойствами, то*

$$J(v,t) = \Delta, \quad t \in \Delta, \tag{14}$$

и

$$\sup_{t \in \Delta} |v(t)| < \varepsilon. \tag{15}$$

Доказательство. Из леммы 3 следуют неравенства

$$|v(t)| < \varepsilon, \quad t \in \Delta. \tag{16}$$

Поэтому точки θ и τ – точки разрыва функции v.

Докажем теперь неравенство (15). Так как функция v строго возрастает на Δ, из тождества (13) следует, что v принимает на Δ значения разных знаков. Таким образом, невыполнение неравенства (15) означает, что

$$\lim_{t \to \tau-} v(t) = \varepsilon \tag{17}$$

или

$$\lim_{t \to \theta+} v(t) = -\varepsilon. \tag{18}$$

Равенство (17) невозможно в силу леммы 3. Предположим, что выполнено равенство (18). Пусть

$$J_+(v,t) = \{s \in J(v,t) : \, v(s) > 0\} \text{ и } J_-(v,t) = \{s \in J(v,t) : \, v(s) < 0\}$$

для $t \in (\theta, \tau)$.

Если выполнено равенство (18), то

$$\sup_{s \in J_+(v,t)} v(s) \to 0, \quad t \to \theta+,$$

откуда следует, что

$$\int_{J_+(v,t)} A(v(s))\,ds \to 0, \quad t \to \theta+. \tag{19}$$

В то же время, так как θ – точка разрыва функции v, у нее есть правосторонняя окрестность U, в которой v непрерывна и отрицательна. Поэтому существует такое $c < 0$, что

$$\int_{J_-(v,t)} A(v(s))\,ds \le c \tag{20}$$

для $t \in U$, близких к θ.

Соотношения (27) и (20) противоречат тождеству (13), что и доказывает невозможность равенства (18).

Докажем теперь равенство (14). Так как выполнено неравенство (1), из неравенства (15) следует, что

$$J(v,t) \subset \Delta, \quad t \in \Delta.$$

Рассмотрим такие $t_1, t_2 \in \Delta$, что $t_1 < t_2$ и $v(t_1), v(t_2) < 0$. Обозначим $J(v,t_i) =< l_i, r_i >$, $i = 1, 2$. Покажем, что

$$r_1 = r_2. \tag{21}$$

Так как $v(t_2) > v(t_1)$, $r_2 \ge r_1$. Предположим, что $r_2 > r_1$. Так как $v(t_1) < 0$ и $k(v,t_1) = 0$, функция $v(t)$ должна принимать положительные значения в левосторонней окрестности точки r_1. Но тогда $v(t) > 0$ при (r_1, r_2), поэтому

$$\int_{r_1}^{r_2} A(v(s))\,ds > 0. \tag{22}$$

С другой стороны, $v(t) < 0$ на (t_1, t_2) и $l_1 \le l_2$ так как $v(t_1) < v(t_2)$. Следовательно,

$$\int_{l_1}^{l_2} A(v(s))\,ds \le 0. \tag{23}$$

Искомое противоречие вытекает теперь из соотношений

$$0 = I(v,t_1)k(v,t_1) = \int_{l_1}^{r_1} A(v(s))\,ds =$$

$$= \int_{l_1}^{l_2} A(v(s))\,ds + \int_{l_2}^{r_2} A(v(s))\,ds - \int_{r_1}^{r_2} A(v(s))\,ds < 0,$$

в которых мы учитываем, что первое слагаемое в последней строке неположительно в силу (23), второе слагаемое равно нулю, а третье отрицательно в силу (22).

Таким образом, мы показали, что существует число $r \le \tau$ со следующим свойством: если $v(t) < 0$ для некоторого $t \in \Delta$, то r является правым концом множества $J(v,t)$. Покажем, что

$$r = \tau. \tag{24}$$

Отметим, что функция v положительна в некоторой левосторонней окрестности точки τ.

Фиксируем такую последовательность точек $p_n < \tau$, что $v(p_n) > 0$ и $p_n \to \tau$ при $n \to \infty$. Так как $k(v,p_n) = 0$, для каждого n найдется такая точка

$$t_n \in J(v,p_n) \subset \Delta,$$

что $v(t_n) < 0$. Из включения $t_n \in J(v,p_n)$ следует, что $p_n \in J(v,t_n)$; как показано выше, $p_n \le r$, что доказывает (24). Таким образом, любое из множеств $J(v,t)$, $t \in (\theta,\tau]$, имеет вид $< l,\tau >$, где $l \ge \theta$.

Так же показывается, что любое множество $J(v,t)$, $t \in (\theta,\tau]$, имеет вид $< \theta, r >$, где $r \le \tau$, но тогда $J(v,t) =< \theta,\tau >$, что влечет равенство (14). $\square$

Легко понять, что множество неподвижных точек оператора Φ неполно в $L^1([0,1])$: последовательность неподвижных точек

$$v_k(t) = -\frac{\varepsilon}{2k} + 2\frac{t\varepsilon}{2k}, \quad t \in [0,1],\ k \ge 1,$$

сходится в себе, но при этом стремится при $k \to \infty$ к функции $v(t) \equiv 0$, не лежащей в $\mathcal{V}$.

Выделим из множества неподвижных точек, описанных в теореме 2, подмножество $F\mathcal{V}$, состоящее из неподвижных точек v, удовлетворяющих условию

$$v(\tau) - \lim_{t\to\theta+} v(t) < \varepsilon. \tag{25}$$

Покажем, что неподвижные точки Φ, принадлежащие множеству $F\mathcal{V}$, сильно неустойчивы в следующем смысле.

Теорема 3. *Пусть v – неподвижная точка Φ, принадлежащая множеству $F\mathcal{V}$. Существует такое $d > 0$, что если $z \in \mathcal{V}$,*

$$|z(t) - v(t)| \le d, \quad t \in (\theta,\tau], \tag{26}$$

$$|z(t)| = |v(t)| = 1, \quad t \in [-1, \theta] \cup (\tau, 1], \tag{27}$$

и z не является неподвижной точкой Φ, то $\sup_{t\in[0,1]} |\Phi^n(z(t)) - v(t)| > d$ *при некотором $n > 0$.*

Доказательство. Фиксируем такую неподвижную точку v оператора Φ, что

$$\tau = \inf\{t: \ v(t) = 1\} > \theta = \sup\{t: \ v(t) = -1\}$$

и выполнено условие (25).

Выберем число $d > 0$ таким, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$2d + 2\varepsilon < 1 \tag{28}$$

(это возможно в силу неравенства (1)) и

$$2d + v(\tau) - \lim_{t\to\theta+} v(t) < \varepsilon \tag{29}$$

(это возможно в силу условия (25)).

Пусть $\Delta = (\theta, \tau]$. Из неравенств (27), (15) и (28) следует, что

$$|z(t) - z(s)| \geq (1 - d) - (d + \varepsilon) > \varepsilon$$

при $t \in \Delta$ и $s \in [0, \theta] \cup (\tau, 1]$. Из неравенства (29) следует, что

$$|z(t) - z(s)| < \varepsilon$$

при $t, s \in \Delta$.

Поэтому если для $z \in \mathcal{V}$ выполнено условие (27), то $J(z, t) = \Delta$ при $t \in \Delta$ и

$$k(z, t) = k := \frac{1}{\tau - \theta} \int_\theta^\tau A(z(s))\, ds, \quad t \in \Delta.$$

Если z – не неподвижная точка Φ, то $k \neq 0$. Пусть для определенности $k > 0$. Положим $z_n(t) = \Phi^n(z)(t)$. Если $\sup_{t\in[0,1]} |z_1(t) - v(t)| \leq d$, то $J(z_1, t) = \Delta$ при $t \in \Delta$ и $z_1(t) = z(t) + k > z(t)$ при $t \in \Delta$. Тогда

$$k_1 = k(z_1, t) \geq k, \quad t \in \Delta.$$

Повторяя это рассуждение, мы видим, что если $\sup_{t\in[0,1]} |\Phi^n(z(t)) - v(t)| \leq d$ при некотором n и всех $l \leq n$, то $J(z_l, t) = \Delta$ при $t \in \Delta$ и $l \leq n$, но тогда

$$z_l(t) \geq z_{l-1}(t) + k, \quad t \in \Delta, \ l \leq n,$$

что возможно лишь для конечного множества значений n. $\square$

5. Сходимость траекторий к неподвижным точкам. Докажем теперь, что если функция $A(x)$ строго возрастающая, то траектории оператора Φ сходятся к неподвижным точкам относительно нормы пространства $L^1([0,1])$.

Пусть $v, v' \in \mathcal{V}$; положим

$$R(v, v') = \int_0^1 |v(s) - v'(s)|\, ds. \tag{30}$$

Теорема 4. *Для любой функции $v_0 \in \mathcal{V}$ существует такая неподвижная точка V оператора Φ, что*

$$R(v_n, V) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{31}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $v_n = \Phi^n(v_0)$ и определим числа

$$\tau_n = \inf\{t: \ v_n(t) \geq \varepsilon\} \text{ и } \theta_n = \sup\{t: \ v_n(t) \leq -\varepsilon\}.$$

Из доказательства леммы 3 следует, что если $v_n(t) \geq \varepsilon$, то $v_{n+1}(t) > \varepsilon$; поэтому

$$\tau_{n+1} \leq \tau_n, \quad n \geq 0.$$

Из того же доказательства леммы 3 следует, что

$$\theta_{n+1} \geq \theta_n, \quad n \geq 0.$$

Поэтому существуют пределы

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n \text{ и } \theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n;$$

ясно, что $\theta \leq \tau$.

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть $\theta = \tau = T$. Предположим для определенности, что $T \in (0,1)$ (случаи $T = 0$ и $T = 1$ рассматриваются так же).

Фиксируем произвольное $d \in (0, \min(T, 1-T))$. Ясно, что существует такое $N_0(d)$, что если $n \geq N_0(d)$, то

$$v_n(t) \geq \varepsilon, \quad t \in [T+d, 1], \text{ и } v_n(t) \leq -\varepsilon, \quad t \in [0, T-d].$$

Из леммы 3 следует, что существует такое $N_1(d)$, что если $n \geq N_1(d)$, то

$$v_n(t) = 1, \quad t \in [T+d, 1], \text{ и } v_n(t) = -1, \quad t \in [0, T-d],$$

но тогда v_n может отличаться от V_T лишь на промежутке длины $2d$. Поэтому

$$R(v_n, V_T) \leq 4d, \quad n \geq N_1(d),$$

что и доказывает утверждение теоремы в силу произвольности d.

Случай 2. Предположим теперь, что $\theta < \tau$, и обозначим через Δ отрезок $[\theta, \tau]$.

Переопределим, если необходимо, каждую из функций v_n, сделав функцию v_n непрерывной справа в θ. Ясно, что такое переопределение не меняет значений v_n в других точках и не влияет на сходимость в $L^1([0,1])$. После такого переопределения мы можем считать, что $v_n(\theta) > -\varepsilon$ при всех n. Действительно, если $v_n(\theta) \leq -\varepsilon$, то из доказательства леммы 3 следует, что $v_{n+1}(t) < -\varepsilon$ в некоторой правой окрестности точки θ, что невозможно.

Рассмотрим функции

$$f_n(t) = v_n(t) - v_n(\theta), \quad t \in \Delta.$$

Из равенств

$$f_{n+1}(t) - f_n(t) = (v_{n+1}(t) - v_n(t)) - (v_{n+1}(\theta) - v_n(\theta)) = k(v_n, t) - k(v_n, \theta)$$

и из монотонности функции k следуют неравенства

$$0 \leq f_{n+1}(t) - f_n(t) \leq k(v_n, \tau) - k(v_n, \theta), \quad t \in \Delta.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k(v_n, \tau) - k(v_n, \theta))$$

с неотрицательными членами сходится, поскольку его частные суммы не превосходят 4. Следовательно, последовательность функций f_n сходится равномерно на Δ; обозначим предельную функцию через $g(t)$.

Из включений $J(v_{n+1}, \theta) \subset J(v_n, \theta)$ следует, что существует множество $J_1 = \cap_{n>0} J(v_n, \theta)$, для которого

$$\text{dist}_H(\text{Cl}(J_1), \text{Cl}(J(v_n, \theta))) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{32}$$

Если $t \notin \Delta$, то $|v_n(t)| \geq \varepsilon$ при достаточно больших n, поэтому из неравенства $\varepsilon < 1/2$ и из леммы 3 следует, что $t \notin J_1$. Следовательно, $J_1 \subset \Delta$. Обозначим через I_1 длину промежутка J_1; ясно , что $I_1 \neq 0$.

Фиксируем число c и определим функцию

$$F(c) = \int_{J_1} A(c + g(t))\, dt.$$

Ясно, что F непрерывна.

Из неравенств $0 \leq g(t) \leq 2\varepsilon$ и из монотонности функции A следуют неравенства $F(-2\varepsilon) \leq 0$ и $F(0) \geq 0$. Поэтому существует такое $c \in [-2\varepsilon, 0]$, что $F(c) = 0$.

Покажем, что

$$v_n(\theta) \to c, \quad n \to \infty. \tag{33}$$

Фиксируем $\delta > 0$ и предположим, что неравенства

$$v_n(\theta) < c - \delta \tag{34}$$

выполнены для бесконечного множества индексов n.

Так как функция A строго возрастающая, выполнено неравенство

$$A(x - \delta/2) - A(x) < 0, \quad -2\varepsilon \leq x \leq 0,$$

если δ достаточно мало, поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что

$$A(x - \delta/2) < A(x) - \delta_1, \quad -2\varepsilon \leq x \leq 0. \tag{35}$$

Существует такое n_0, что если $n \geq n_0$, то

$$I(v_n, \theta) < 2I_1, \tag{36}$$

$$\int_{J(v_n,\theta)\setminus J_1} |A(v_n(t))|\, dt < \frac{\delta_1 I_1}{2} \tag{37}$$

и

$$|f_n(t) - g(t)| < \delta/2. \tag{38}$$

Рассмотрим $n \geq n_0$, для которого верно неравенство (34). Выполнены соотношения

$$\frac{I(v_n, \theta)k(v_n, \theta)}{I_1} = \frac{1}{I_1}\int_{J(v_n,\theta)} A(v_n(t))\, dt =$$

$$= \frac{1}{I_1}\left(\int_{J(v_n,\theta)\setminus J_1} A(v_n(t))\,dt + \int_{J_1} A(v_n(\theta)+f_n(t))\,dt\right). \qquad (39)$$

Из неравенства (37) следует, что первое слагаемое в (39) не превосходит $\delta_1/2$. Представим аргумент подинтегральной функции во втором слагаемом в виде

$$A(v_n(\theta)+f_n(t)) = A(v_n(\theta)+f_n(t)-g(t)+g(t)).$$

Из неравенств (34) и (38) следует, что $v_n(\theta)+f_n(t)-g(t) < c-\delta/2$, но тогда из равенства $F(c)=0$ и неравенства (35) вытекает, что второе слагаемое в (39) не превосходит $-\delta_1$. Отсюда и из (36) вытекает неравенство

$$k(v_n,\theta) < -\delta_1/4.$$

Тогда

$$v_{n+1}(\theta) < v_n(\theta) - \delta_1/4.$$

Отсюда следует, что аналог неравенства (34) выполнен и для индекса $n+1$, и мы можем, повторяя приведенное выше рассуждение, получить неравенства

$$v_{n+p}(\theta) < v_n(\theta) - p\delta_1/4, \quad p>0,$$

выполнение которых для бесконечного множества индексов p невозможно.

Так же показывается, что неравенство $v_n(\theta) > c+\delta$ не может выполняться для бесконечного множества индексов n. Так как δ можно взять произвольным, это доказывает соотношение (33). Из доказанного следует, что функции $v_n(t) = v_n(\theta)+f_n(t)$ сходятся к функции $c+g(t)$ равномерно на Δ.

Определим функцию V на $[0,1]$ так: $V(t)=-1$ при $t\in[0,\theta]$, $V(t) = c+g(t)$ при $t\in(\theta,\tau]$ и $V(t)=1$ при $t\in(\tau,1]$.

Из свойства (P3) и из неравенств $|v_n(t)|<\varepsilon,\ t\in\Delta$, следует, что множество точек разрыва каждой из функций v_n в Δ совпадает с множеством точек разрыва функции v_0; отсюда следует конечность множества точек разрыва функции V. Если $s,t\in\Delta$ и $s<t$, то из неравенств $v_0(s)<v_0(t)$ и $k(v_n,s)\le k(v_n,t)$ следует, что $V(s)<V(t)$. Таким образом, $V\in\mathcal{V}$.

Соотношение $R(v_n,V)\to 0$ доказывается с использованием леммы 3 так же, как в случае 1.

Осталось показать, что V – неподвижная точка оператора Φ.

Определим функцию V' на $[0,1]$ так: $V'(t) = -1$ при $t \in [0,\theta)$, $V'(t) = c + g(t)$ при $t \in [\theta,\tau]$ и $V'(t) = 1$ при $t \in (\tau, 1]$. Покажем, что

$$J_1 = J(V', \theta). \tag{40}$$

Пусть $t \in J_1$. Переходя к пределу $n \to \infty$ в неравенствах

$$|v_n(t) - v_n(\theta)| \le \varepsilon, \quad n > 0, t \in J(v_n, \theta),$$

мы получаем неравенство

$$|V'(t) - V'(\theta)| \le \varepsilon.$$

Следовательно, $t \in J(V', \theta)$.

Пусть $t \notin J_1$. Тогда

$$f_n(t) = v_n(t) - v_n(\theta) > \varepsilon$$

при некотором n. Из монотонности f_n по нижнему индексу следует, что

$$f_{n+p}(t) = v_{n+p}(t) - v_{n+p}(\theta) \ge f_n(t) > \varepsilon, \quad p > 0,$$

а отсюда, устремляя p к ∞, мы получаем неравенство

$$V'(t) - V'(\theta) \ge f_n(t) > \varepsilon,$$

которое показывает, что $t \notin J(V', \theta)$.

Таким образом, равенство (40) доказано. Из него вытекают равенства

$$0 = \int_{J_1} A(c + g(s))\, ds = \int_{J_1} A(V'(s))\, ds = \int_{J(V',\theta)} A(V'(s))\, ds = k(V', \theta).$$

Так же доказывается равенство $k(V', \tau) = 0$.

Ясно, что из этих равенств следует тождество $k(V,t) \equiv 0$, показывающее, что V – неподвижная точка Φ. $\square$

6. Заключение. В данной работе исследована дискретная динамическая система, моделирующая итеративный процесс выбора в континуальной группе агентов между двумя возможными исходами. Описана структура возможных неподвижных точек, изучена их устойчивость. Доказано, что любая траектория сходится к неподвижной точке.

Литература

1. Ren W., Cao Y., Distributed Coordination of Multi-agent Networks. *Emergent Problems, Models, and Issues*. New York, Springer (2011).

2. Krause U., Positive Dynamical Systems in Discrete Time. *Theory, Models, and Applications*. Berlin, De Gruyter (2015).

3. Krause U. Soziale Dynamiken mit vielen Interakteuren. Eine Problemskizze. In: U. Krause and M. Stockler (Eds.), *Modellierung und Simulation von Dynamiken mit vielen interagierenden Akteuren*, Universitat Bremen, 37–51 (1997).

4. Krause U. A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation. In: *Communications in Difference Equations*, 227-236. Amsterdam, Gordon and Breach Publ. (2000).

5. Hegselmann R., Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence: Models, analysis and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation* **5** (2002).

6. Pilyugin S.Yu., Campi M.C. Opinion formation in voting processes under bounded confidence. *Networks and Heterogeneous Media* **14**, 619-634 (2019). https:// doi: 10.3934/nhm.2019024

7. Bodunov N.A., Pilyugin S.Yu. Convergence to fixed points in one model of opinion dynamics. *Journal of Dynamical and Control Systems* (2020). https://doi.org/10.1007/s10883-020-09514-1

8. Bhattacharyya A., Braverman M., Chazelle B., Nguyen H. On the convergence of the Hegselmann-Krause system. In: Proceedings of the 4th Conference on Innovations in Theoretical Computer Science, ITCS '13, New York, NY, USA, (2013).

9. Hegselmann R.,Krause U. Opinion dynamics under the influence of radical groups, charismatic leaders, and other constant signals: A simple unifying model. *Networks and Heterogeneous Media*, 10(3):477–509, (2015).

10. Chen X, Zhang X, Yong X, and Li W. Opinion dynamics of social similarity based Hegselmann–Krause model. *Complexity*, 2017:1820257, (2017).